

Cycles et boucles au cœur du GNSS
Quelle part de la relativité générale dans la précision
d'un positionnement par satellite ?

Commutator
candidat n° 1234

TIPE session 2026 — filière MP — travail individuel

Thème annuel : *Cycles, boucles*

Positionnements : physique (mécanique) · mathématiques (analyse numérique) ·
informatique

- 1 Le point de départ
- 2 Modélisation
- 3 De l'équation d'Einstein aux microsecondes
- 4 Résultats

Le chiffre dont je suis parti

Presque toute vulgarisation du GPS contient cette phrase

Le raisonnement habituel

Les horloges embarquées avancent de **38,6 μs par jour**. Multiplié par c , cela fait

$$c \times 38,6 \mu\text{s} = 11,6 \text{ km} \quad \text{par jour.}$$

Mais 11,6 km de quoi ?

Le calcul est juste. La conclusion qu'on en tire ne l'est pas nécessairement.

Ce qui m'a mis la puce à l'oreille

Un récepteur ne mesure pas des distances, mais des pseudodistances

$$P_i = \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}\| + d$$

- Quatre inconnues : trois de position, **une d'horloge**.
- d est **le même pour tous les satellites** : c'est la même horloge qui les date tous.
- Un décalage *identique sur tous les satellites* est donc indiscernable d'un décalage de d .

Ne devrait-il pas s'annuler ?

Quelle part de l'erreur de position d'un récepteur GNSS est réellement imputable aux effets relativistes, une fois pris en compte le fait que le récepteur résout simultanément sa position et le biais de sa propre horloge ?

Objectif : construire une chaîne de simulation vérifiable, injecter chaque terme relativiste séparément, et mesurer sa contribution propre à l'erreur de position.

Ancrage au thème : cinq boucles emboîtées

Le GNSS n'est pas relié au thème par métaphore — il en est constitué

- ❶ **Boucle orbitale** — la constellation se referme en 11,97 h, un demi-jour sidéral.
- ❷ **Boucle de mesure** — la position dépend du temps de propagation, qui dépend de la position.
- ❸ **Boucle algorithmique** — Newton-Gauss est une suite de linéarisations.
- ❹ **Boucle de Wheeler** — la matière courbe l'espace-temps, qui guide la matière.
- ❺ **Boucle de correction périodique** — le terme d'excentricité se répète à chaque orbite.

Modélisation : pourquoi quatre satellites

L'astuce est la même dans les deux cas — la soustraction linéarisée

Horloge parfaite

$$\rho_i^2 = \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}\|^2$$

Le bloc $x^2 + y^2 + z^2$ est commun : on soustrait, le système devient linéaire. Trois satellites suffisent.

Horloge réelle

$$P_i = \rho_i + d$$

En élevant au carré, d^2 **disparaît en même temps**. Trois équations linéaires, quatre inconnues : il faut un quatrième satellite.

Le récepteur se recale sur le temps atomique : un GPS est aussi une horloge.

Deux résolutions indépendantes

Se donner un moyen de se contrôler soi-même

Bancroft (1985) — forme fermée

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{a}_i, \mathbf{u} - \mathbf{a}_i \rangle = 0$$

Produit de Minkowski : le récepteur est sur le **cône de lumière** de chaque satellite. Aucune itération.

Newton-Gauss — itératif

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \Delta \mathbf{P}$$

Surdéterminé, moindres carrés, et $\mathbf{Q} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$ donne les DOP.

Aucune ligne de code commune : **les deux se valident mutuellement.**

Validation avant toute conclusion

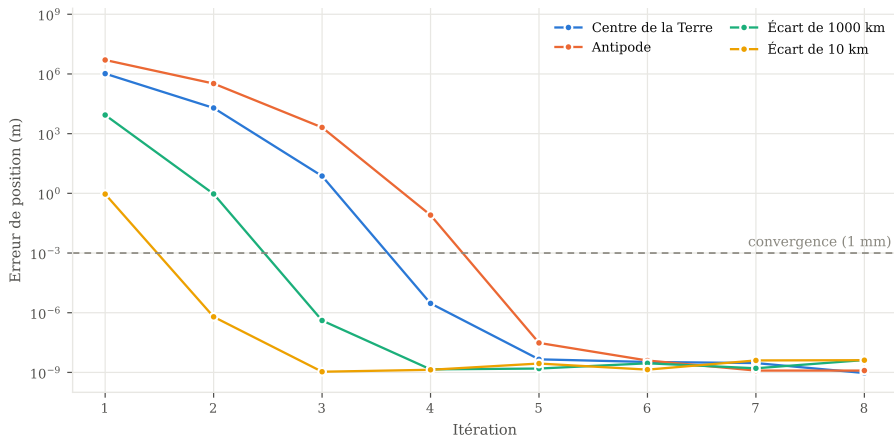
Sans perturbation, la chaîne doit boucler exactement

Erreur résiduelle, Newton-Gauss	2.0 nm
Erreur résiduelle, Bancroft	49 μm
Écart entre les deux solveurs	$5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

Trois semaines perdues

Une erreur résiduelle de **24 m** attribuée au solveur venait en fait du modèle : rotation terrestre injectée à la génération, non corrigée à la résolution. **Générer et résoudre doivent partager les mêmes hypothèses.**

Convergence de la boucle



$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad \xrightarrow{\text{champ faible}} \quad g_{00} = - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}$$

Contribution	Écart relatif	µs / jour
Gravitationnelle (RG)	$+5,2914 \cdot 10^{-10}$	+45,72
Cinématique (RR)	$-8,3491 \cdot 10^{-11}$	-7,21
Géoïde / modèle sphérique	$+8,024 \cdot 10^{-13}$	+0,07
Total	$+4,4646 \cdot 10^{-10}$	+38,57

Un réglage matériel, pas logiciel

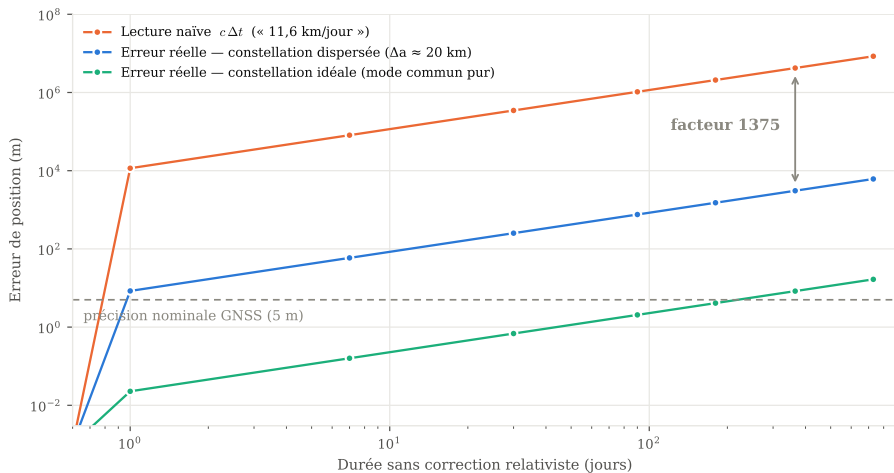
L'oscillateur des satellites est volontairement déréglé **avant le lancement** :

10 229 999,995 43 Hz au lieu de 10,23 MHz

pour qu'une fois en orbite il paraisse juste vu du sol.

La relativité générale n'est pas une correction logicielle :
c'est un **réglage matériel**.

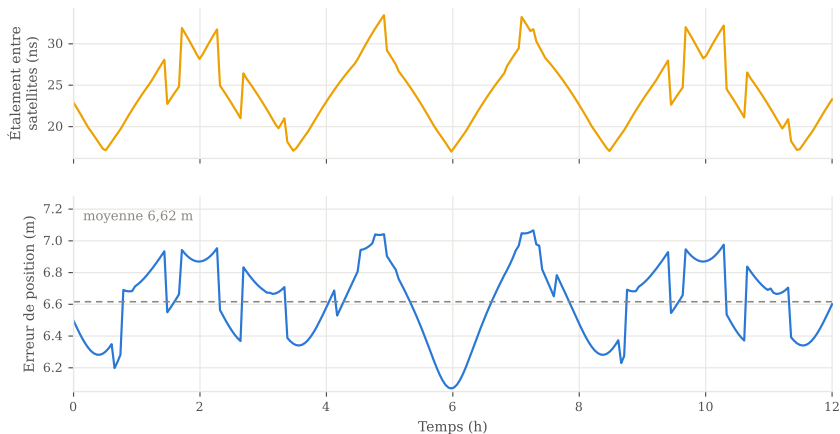
Résultat principal



Lecture naïve $c \Delta t$ après un jour	11,56 km
Erreur réelle, constellation idéale	2,3 cm
Erreur réelle, constellation dispersée	8,4 m
Surestimation à un an	$\times 1375$

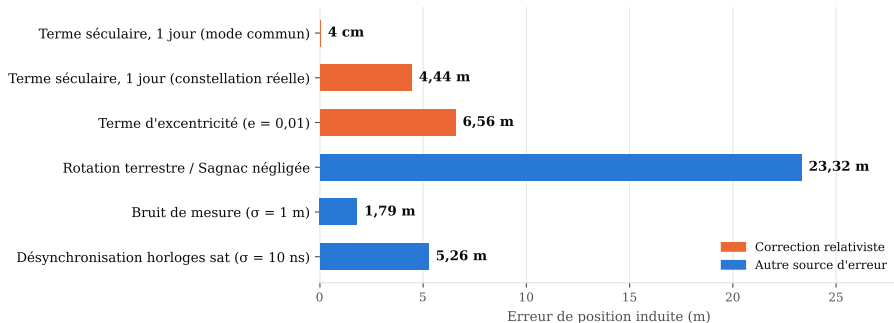
- Le chiffre est une erreur de **datation**, pas de position.
- Il est absorbé par l'inconnue d'horloge, que le récepteur résout de toute façon.
- Confirmé par Fliegel & DiEposti (1996) et Misra (2023).
- **La correction reste indispensable** : la part différentielle dépasse 5 m en moins d'un jour, et le GNSS diffuse aussi du temps.

L'excentricité : mille fois plus petite, bien plus coûteuse



22,9 ns d'amplitude seulement, mais **6,62 m** d'erreur : le terme dépend de l'anomalie excentrique de chaque satellite.

Budget d'erreur



Hypothèse	Conséquence
Orbites képlériennes pures Pas d'atmosphère Segment sol absent	DOP approchés ; conclusion principale intacte Chiffres relatifs, pas un budget opérationnel Limite principale : la dérive réelle est bornée par le suivi au sol
Dispersion tirée au hasard	Ordre de grandeur, pas une mesure

- Le chiffre de 11,6 km/jour est **exact et mal interprété** : il quantifie une dérive de datation, pas une erreur de position.
- Dans un système qui estime ses propres biais, **seule la part non commune d'une perturbation se paie**.
- Les termes qui comptent sont différentiels : excentricité (6,6 m), dispersion orbitale (8,4 m/jour), et surtout la rotation terrestre (23 m).
- **Ouverture** — confronter le modèle à des relevés NMEA réels, et étendre au RTK où la mesure de phase change la nature du problème.