

Cycles et boucles au cœur du GNSS : quelle part de la relativité générale dans la précision d'un positionnement par satellite ?

Commutator

Candidat n° 1234 — filière MP — travail individuel

Travail d'Initiative Personnelle Encadré, session 2026 — thème annuel Cycles, boucles

Abstract

Presque toute vulgarisation du positionnement par satellite avance qu'en l'absence de correction relativiste, le GPS dériverait d'une dizaine de kilomètres par jour. Ce travail vérifie ce chiffre par la simulation numérique et montre qu'il est arithmétiquement exact mais physiquement mal interprété : il quantifie une dérive de *datation*, non une erreur de *position*. Un récepteur GNSS estimant simultanément sa position et le biais de sa propre horloge, toute perturbation commune à l'ensemble des satellites lui est transparente. Une chaîne de simulation complète — constellation képlérienne, génération des pseudodistances, résolution par la solution fermée de Bancroft et par la boucle de Newton-Gauss — mesure 2,3 cm d'erreur de position par jour sur une constellation idéale, contre les 11,56 km annoncés. Ce qui dégrade réellement la position relève des termes *différentiels* : terme relativiste d'excentricité (6,56 m), dispersion des demi-grands axes réels (8,4 m par jour) et, plus lourd que l'ensemble des effets relativistes, la correction de rotation terrestre (23,3 m). La conclusion générale dépasse le GNSS : dans un système qui estime ses propres biais, ce n'est pas l'amplitude d'une perturbation qui décide de son coût, mais sa structure.

Keywords : pseudodistance, relativité générale, moindres carrés, mode commun, dilution de précision

Table des matières

1	Le point de départ : un chiffre trop rond	3
1.1	Ancrage dans le thème « Cycles, boucles »	3
2	Modélisation : de la géométrie à l'équation de mesure	3
2.1	L'équation de pseudodistance	3
2.2	Trois satellites, puis quatre	4
2.3	Deux résolutions indépendantes	4
2.4	Les deux boucles cachées du modèle de mesure	4
3	De l'équation d'Einstein au décalage des horloges	5
3.1	L'équation de champ et sa limite de champ faible	5
3.2	Marche d'une horloge	5
3.3	Les deux termes que l'on oublie	6
4	Construction et validation de la simulation	6
4.1	Ce que le programme fait	6
4.2	Le test qui rend les résultats exploitables	6
5	Résultats	7
5.1	Résultat principal : le terme séculaire est un mode commun	7

5.2	Le terme d'excentricité est différentiel dès la première seconde	8
5.3	Le cycle de la géométrie	8
5.4	Budget d'erreur	11
5.5	Pourquoi la redondance change tout	11
6	Analyse critique et limites	11
7	Conclusion	12
8	Bibliographie commentée	12
Annexe A	Extraits du code	13
Annexe B	Mise en cohérence des objectifs du TIPE	14
Annexe B.1	Positionnements thématiques	14
Annexe B.2	Mots-clés	14
Annexe B.3	Rubriques rédigées	14
Annexe C	Déroulé opérationnel du TIPE	15

Correspondance avec les parties du dossier TIPE. Le corps de l'article est la partie B, le développement scientifique : de la section 1 à la section 6. La partie C, le déroulé opérationnel, est reportée en [Annexe C](#). La partie A — la mise en cohérence des objectifs, déposée avant le travail — est reportée en [Annexe B](#), où elle ne coupe plus le fil du raisonnement.

1. Le point de départ : un chiffre trop rond

Presque toute vulgarisation du GPS contient la même phrase : sans correction relativiste, le système dériverait d’une dizaine de kilomètres par jour. Ce travail part de la volonté de vérifier ce chiffre — et découvre en chemin qu’il ne mesure pas ce qu’on lui fait dire.

Le raisonnement habituel tient en deux lignes. Les horloges embarquées avancent de 38,6 microsecondes par jour par rapport au sol ; multiplié par la vitesse de la lumière, cela fait **11,6 km** de distance par jour. Le calcul est juste. La conclusion qu’on en tire ne l’est pas nécessairement.

Car un récepteur GNSS ne mesure pas des distances : il mesure des *pseudodistances*, et il résout simultanément quatre inconnues — trois de position, une d’horloge. Or un décalage *identique sur tous les satellites* est mathématiquement indiscernable d’un décalage de l’horloge du récepteur. Il devrait donc être absorbé par l’inconnue temporelle, sans toucher à la position. Si c’est vrai, les 11,6 km par jour ne sont pas une erreur de position : c’est une erreur de *datation*.

Quelle part de l’erreur de position d’un récepteur GNSS est réellement imputable aux effets relativistes, une fois pris en compte le fait que le récepteur résout simultanément sa position et le biais de sa propre horloge ?

1.1. Ancrage dans le thème « Cycles, boucles »

Le GNSS n’est pas ancré au thème par métaphore : il est littéralement constitué de boucles emboîtées, et chacune intervient dans ce travail.

1. **Boucle orbitale.** La constellation a une période de 11,97 h — un demi-jour sidéral. La géométrie du ciel se referme exactement deux fois par jour (figure 4).
2. **Boucle de mesure.** La position dépend du temps de propagation, qui dépend de la position. Le temps d’émission ne peut être obtenu que par itération.
3. **Boucle algorithmique.** Le système d’équations est non linéaire : la résolution par Newton-Gauss est une boucle de linéarisations successives (figure 1).
4. **Boucle de rétroaction relativiste.** Le potentiel gravitationnel détermine la marche des horloges, qui détermine la position calculée, laquelle sert à évaluer le potentiel. C’est la boucle de Wheeler : *la matière courbe l’espace-temps, qui guide la matière*.
5. **Boucle de correction périodique.** Le terme relativiste d’excentricité est sinusoïdal sur une orbite : une correction qui se répète indéfiniment (figure 3).

2. Modélisation : de la géométrie à l’équation de mesure

2.1. L’équation de pseudodistance

Le récepteur date la réception avec sa propre horloge, imparfaite. La grandeur qu’il obtient n’est donc pas la distance ρ_i mais la pseudodistance

$$P_i = \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}\| + d, \quad (1)$$

où $\mathbf{X} = (x, y, z)$ est la position cherchée, $\mathbf{X}_i$ celle du satellite i , et $d = cb$ le biais d’horloge du récepteur exprimé en mètres. **Le point décisif est que d est le même pour tous les satellites** : c’est la même horloge qui les date tous.

2.2. Trois satellites, puis quatre

Si l'horloge était parfaite ($d = 0$), trois sphères suffiraient. En développant les carrés, le bloc $x^2 + y^2 + z^2$ est commun à toutes les équations : on l'élimine en soustrayant la première des autres, ce qui **linéarise** le système,

$$2(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1) \cdot \mathbf{X} = (s_i^2 - s_1^2) - (\rho_i^2 - \rho_1^2). \quad (2)$$

Deux équations linéaires pour trois inconnues : le lieu est une droite, qu'on réinjecte dans une sphère pour obtenir un trinôme et deux solutions, dont une seule est proche de la surface terrestre.

Avec l'inconnue d'horloge, le même procédé fonctionne : en élevant (1) au carré, **le terme d^2 s'élimine en même temps que le bloc quadratique**. Il reste trois équations linéaires pour quatre inconnues, d'où la nécessité d'un quatrième satellite.

2.3. Deux résolutions indépendantes

Solution fermée de Bancroft (1985)

En munissant $\mathbb{R}^4$ du produit pseudo-euclidien de Minkowski $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4$, et en posant $\mathbf{a}_i = (\mathbf{X}_i, P_i)$ et $\mathbf{u} = (\mathbf{X}, d)$, l'équation (1) devient

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{a}_i, \mathbf{u} - \mathbf{a}_i \rangle = 0, \quad (3)$$

c'est-à-dire : **le récepteur appartient au cône de lumière de chaque satellite**. Toute la physique du GNSS tient dans cette ligne, et le fait que la métrique de Minkowski apparaisse ici n'est pas une coïncidence formelle — c'est la structure causale de l'espace-temps qui définit la mesure.

En posant $\lambda = \frac{1}{2}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$, le système devient linéaire en $\mathbf{u}$ à λ fixé : $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{p} + \mathbf{q}$, et la contrainte $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 2\lambda$ donne un simple trinôme en λ . **Aucune itération, aucun point de départ.**

Boucle itérative de Newton-Gauss

Avec $n > 4$ satellites, le système est surdéterminé. On linéarise autour d'une estimation courante, avec $\mathbf{e}_i$ le vecteur unitaire récepteur $\rightarrow$ satellite :

$$H = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_i^\top & 1 \end{bmatrix}_{i=1\dots n}, \quad \Delta \mathbf{u} = (H^\top H)^{-1} H^\top \Delta \mathbf{P}. \quad (4)$$

La matrice $Q = (H^\top H)^{-1}$ ne dépend que de la géométrie et fournit les facteurs d'affaiblissement de la précision (DOP), qui multiplient l'erreur de mesure pour donner l'erreur de position.

2.4. Les deux boucles cachées du modèle de mesure

Deux effets sont faciles à oublier et coûtent chacun plusieurs dizaines de mètres.

- **Temps d'émission.** Le satellite a émis environ 70 ms plus tôt, et s'est déplacé de 270 m depuis. Sa position doit être évaluée à l'instant d'émission, lequel dépend de la distance cherchée : encore une boucle.
- **Rotation terrestre (effet Sagnac).** Pendant la propagation, le repère ECEF tourne. À l'instant simulé, la correction va de -18,6 m à +22,4 m selon le satellite ; sur 24 h l'enveloppe atteint $\pm 25,3$ m à Paris et ± 38 m à l'équateur, pour une borne théorique $\omega_E a R_T / c = 41,2$ m (137 ns). **La négliger produit une erreur de 23,3 m** — soit davantage que tous les termes relativistes réunis.

Ce que cette étape m'a coûté.. Pendant trois semaines, ma chaîne conservait une erreur résiduelle de 24 m que j'attribuais au solveur. Elle venait du modèle : j'injectais la rotation terrestre dans la génération des mesures sans l'appliquer à la résolution. **Générer et résoudre doivent partager exactement les mêmes hypothèses**, sans quoi on mesure ses propres incohérences au lieu de la physique.

3. De l'équation d'Einstein au décalage des horloges

Il s'agit ici de descendre de l'équation de champ jusqu'à un nombre de microsecondes par jour, sans sauter d'étape.

3.1. L'équation de champ et sa limite de champ faible

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (5)$$

À gauche la courbure, à droite le contenu en énergie-impulsion. Autour de la Terre le champ est faible : on pose $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ avec $|h| \ll 1$. En régime statique et pour des vitesses faibles, l'équation des géodésiques se réduit à $d^2x^i/dt^2 = (c^2/2) \partial_i h_{00}$. L'identification avec $\mathbf{a} = -\nabla\Phi$ donne

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right). \quad (6)$$

Résultat central : **le potentiel newtonien n'est rien d'autre que la déformation de la composante temporelle de la métrique**. La gravitation que nous subissons quotidiennement est une courbure du temps, pas de l'espace. En réinjectant (6) dans (5) on retrouve d'ailleurs $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$, ce qui fixe le coefficient $8\pi G/c^4$.

3.2. Marche d'une horloge

Le temps propre d'une horloge de vitesse v au potentiel Φ s'écrit, au premier ordre,

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}. \quad (7)$$

Appliquée au satellite puis à une horloge posée sur le géoïde, et soustraite, elle donne trois contributions.

Contribution	Expression	Écart relatif	μs / jour
Gravitationnelle (RG) altitude, potentiel plus faible : l'horloge avance	$\Phi_{\text{sat}}/c^2 - \Phi_{\text{sol}}/c^2$	$+5,2914 \cdot 10^{-10}$	+45,718
Cinématique (RR) 3874 m/s : l'horloge retarde	$-v^2/(2c^2)$	$-8,3491 \cdot 10^{-11}$	-7,214
Écart géoïde / modèle sphérique rotation terrestre <i>et</i> aplatissement J_2 , qui se compensent	$\Phi_{\text{sol}}/c^2 - W_0/c^2$	$+8,024 \cdot 10^{-13}$	+0,069
Total	—	+4,4646 · 10⁻¹⁰	+38,57

TABLE 1 : Décomposition de l'écart de marche entre une horloge embarquée et une horloge au sol.

Attention à ne pas confondre le troisième terme avec « l'effet de la rotation terrestre » : sur le géoïde, le terme centrifuge (+0,104 μs/j à l'équateur, +0,045 μs/j à Paris) est **exactement compensé** par l'aplatissement, de sorte que toutes les horloges du géoïde battent au même rythme. Ce qui reste ici n'est que l'écart entre le potentiel réel W_0 et le modèle sphérique $-\mu/R_T$ utilisé pour isoler la part gravitationnelle.

La relativité générale est câblée en usine.. Les deux effets ne se compensent pas : il reste +38,57 μ s par jour. La parade est élégante — l'oscillateur des satellites est volontairement déréglé *avant le lancement*, à 10 229 999,995 43 Hz au lieu de 10,23 MHz exactement, pour qu'une fois en orbite il paraisse juste vu du sol. La relativité générale n'est pas une correction logicielle : c'est un réglage matériel.

3.3. Les deux termes que l'on oublie

Terme d'excentricité.. L'orbite n'étant pas rigoureusement circulaire, Φ et v varient au cours d'une révolution. Le décalage constant précédent doit être complété par un terme périodique

$$\Delta t_r = -\frac{2\sqrt{\mu a} e \sin E}{c^2}, \quad (8)$$

d'amplitude $\pm 22,9$ ns pour $e = 0,01$, soit **6,9 m de portée**. (Convention IS-GPS-200 : l'expression ci-dessus est la *correction à appliquer* ; Ashby écrit le même terme avec le signe opposé car il décrit l'*effet*.) Point capital pour la suite : ce terme dépend de l'anomalie excentrique E , **donc de chaque satellite pris séparément**. Il n'est pas un mode commun.

Effet Sagnac.. Purement cinématique en repère tournant, il est de même nature relativiste et se traite par une rotation de la position du satellite d'un angle $\omega_E \tau$.

4. Construction et validation de la simulation

4.1. Ce que le programme fait

1. Constellation képlérienne : 6 plans, 4 satellites par plan, $i = 55^\circ$, $a = 26\,559,8$ km, période 11,97 h.
2. Masque d'élévation 5° depuis Paris ($48,857^\circ$ N ; $2,352^\circ$ E), soit 7 à 9 satellites visibles.
3. Résolution du temps d'émission par itération, puis correction de rotation terrestre.
4. Génération des pseudodistances, avec injection contrôlée de chaque perturbation.
5. Résolution par Newton-Gauss *et* par Bancroft.

4.2. Le test qui rend les résultats exploitables

Avant toute conclusion physique, il fallait garantir que la chaîne *boucle* : sans aucune perturbation, la position retrouvée doit être exactement celle injectée. C'est un test de non-régression, exécuté avant chaque expérience.

Grandeur	Valeur
Erreur résiduelle, Newton-Gauss	2.0 nm
Erreur résiduelle, Bancroft	49 μ m
Itérations pour atteindre le millimètre depuis le centre de la Terre	4
Algorithmes indépendants qui concordent	2

TABLE 2 : Test de non-régression de la chaîne de simulation.

Les deux solveurs, qui ne partagent aucune ligne de code, s'accordent à $5 \cdot 10^{-5}$ m près. C'est ce qui autorise à interpréter ensuite un écart de quelques mètres comme un effet physique et non comme un artefact numérique.

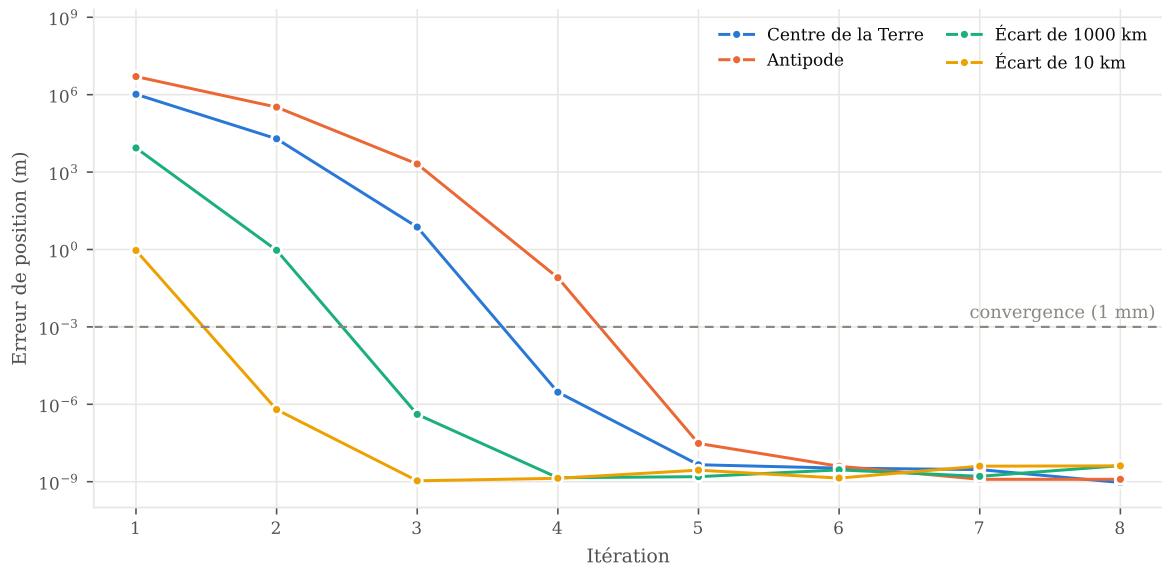


FIGURE 1 : La boucle de Newton-Gauss converge quadratiquement quel que soit le point de départ, y compris depuis le centre de la Terre ou l’antipode. Le nombre d’itérations est le prix à payer pour la non-linéarité ; il reste faible, ce qui explique qu’un récepteur puisse recalculer sa position plusieurs fois par seconde.

5. Résultats

5.1. Résultat principal : le terme séculaire est un mode commun

L’expérience consiste à supprimer la correction relativiste et à laisser le décalage s’accumuler, puis à résoudre normalement. Trois lectures sont comparées.

Lecture	Valeur après un jour
Lecture naïve $c \Delta t$	11,56 km
Erreur de position réelle, constellation idéale	2,3 cm
Erreur de position réelle, constellation dispersée	8,4 m
Surestimation de la lecture naïve à un an	$\times 1375$

TABLE 3 : Les trois lectures d’un même décalage relativiste.

Résultat.. Le chiffre de 11,6 km par jour **n’est pas une erreur de position** : c’est une erreur de datation, et elle est absorbée par l’inconnue d’horloge que le récepteur résout de toute façon. Sur une constellation idéalement homogène, l’erreur de position correspondante est de 2,3 cm par jour. Ce qui dégrade réellement la position, c’est la **fraction différentielle** du décalage — ici 8,4 m par jour, soit 1375 fois moins que le chiffre couramment avancé.

D’où vient le chiffre, et qui l’a corrigé.. La formulation d’origine est d’Ashby lui-même [1] : sans correction, « les erreurs d’horloge accumulées en un seul jour causeraient des *erreurs de navigation* de plus de 11 km ». C’est cette phrase qui a fait le tour de la vulgarisation. La littérature d’ingénierie GPS la nuance explicitement : Fliegel et DiEsposti [8] montrent que seuls les effets *différentiels* entre satellites comptent pour la navigation, et Misra [9] écrit que ce biais commun « serait absorbé avec celui, bien plus grand, de l’horloge du récepteur — l’estimation de position ne serait pas affectée ». Cette simulation retrouve ce résultat de façon indépendante. À noter aussi que les 11,6 km sont la valeur atteinte *en fin* de journée entre deux recalages, la moyenne étant d’environ 5,8 km.

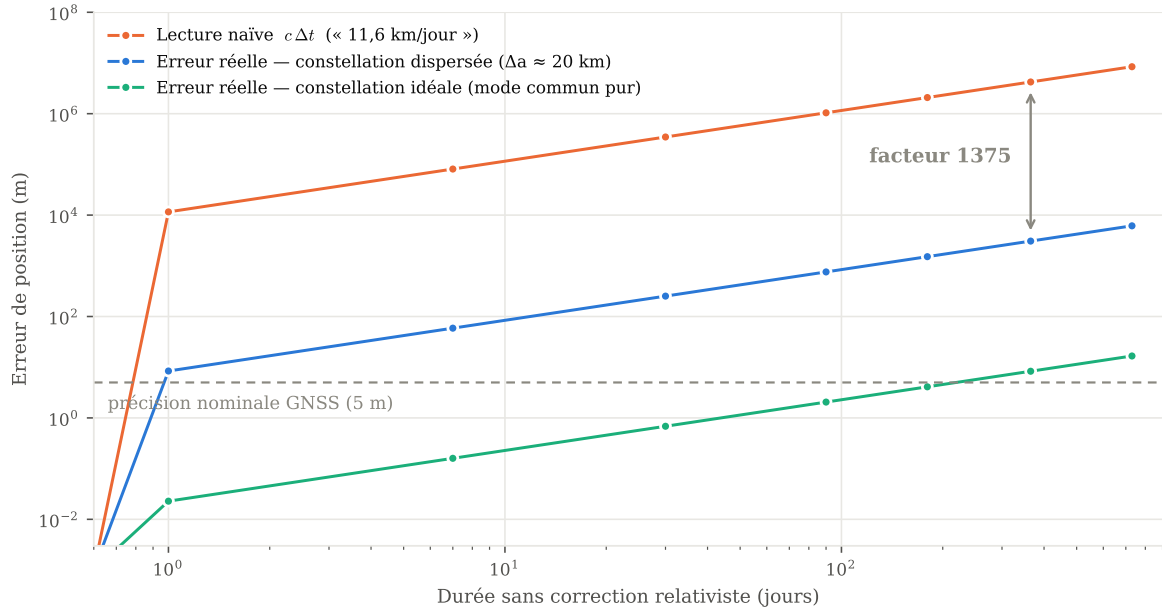


FIGURE 2 : Erreur de position en fonction de la durée écoulée sans correction. La lecture naïve $c\Delta t$ est un ordre de grandeur de distance, pas une erreur de position. Sur une constellation idéale, le décalage est strictement commun et se reporte intégralement sur le biais d'horloge : l'erreur de position reste centimétrique. Sur une constellation réelle, la dispersion des demi-grands axes rend les taux légèrement différents d'un satellite à l'autre, et c'est cette part différentielle seule qui dégrade la position.

Ce que le résultat ne dit pas.. Il ne dit pas que la correction relativiste serait inutile. Elle reste indispensable pour deux raisons que la simulation met en évidence : la part différentielle croît linéairement et dépasse la précision nominale de 5 m **en moins d'un jour** ; et le GNSS est aussi un service de transfert de temps, pour lequel une dérive de 38,6 μs par jour est rédhibitoire — les réseaux de télécommunication et les horodatages financiers en dépendent.

Recoupement avec la littérature.. Deux vérifications indépendantes confortent ces chiffres.

- **Résidu d'éphémérides.** La constellation idéale donne 2,3 cm après un jour. Une estimation analytique indépendante — vitesse radiale $\lesssim 900$ m/s multipliée par 38,6 μs — donne environ 3 cm. Même ordre de grandeur.
- **Dérive différentielle.** Ashby [2] donne la formule $\delta(\Delta f/f) = 3GM\delta a/(2c^2a^2)$. Pour la dispersion effectivement tirée dans cette constellation ($\sigma = 15,8$ km), elle prédit $1,4932 \cdot 10^{-13}$; la simulation mesure $1,4941 \cdot 10^{-13}$, soit 0,06 % d'écart. Le modèle numérique reproduit donc exactement le résultat analytique publié.

5.2. Le terme d'excentricité est différentiel dès la première seconde

L'erreur moyenne est de **6,62 m** (maximum 7,07 m), pour une amplitude de correction de seulement 22,9 ns. C'est le terme relativiste qui pèse le plus lourd sur la position instantanée, alors que son amplitude est 1684 fois plus faible que la dérive séculaire accumulée en 24 h. **Ce n'est pas l'amplitude d'une correction qui compte, c'est son caractère différentiel.**

5.3. Le cycle de la géométrie

Le PDOP oscille entre 1,39 et 2,49 (moyenne 1,76), pour 7,7 satellites visibles en moyenne. C'est ce facteur qui convertit une erreur de mesure en erreur de position : la même erreur d'horloge coûte près de deux fois plus cher aux instants défavorables.

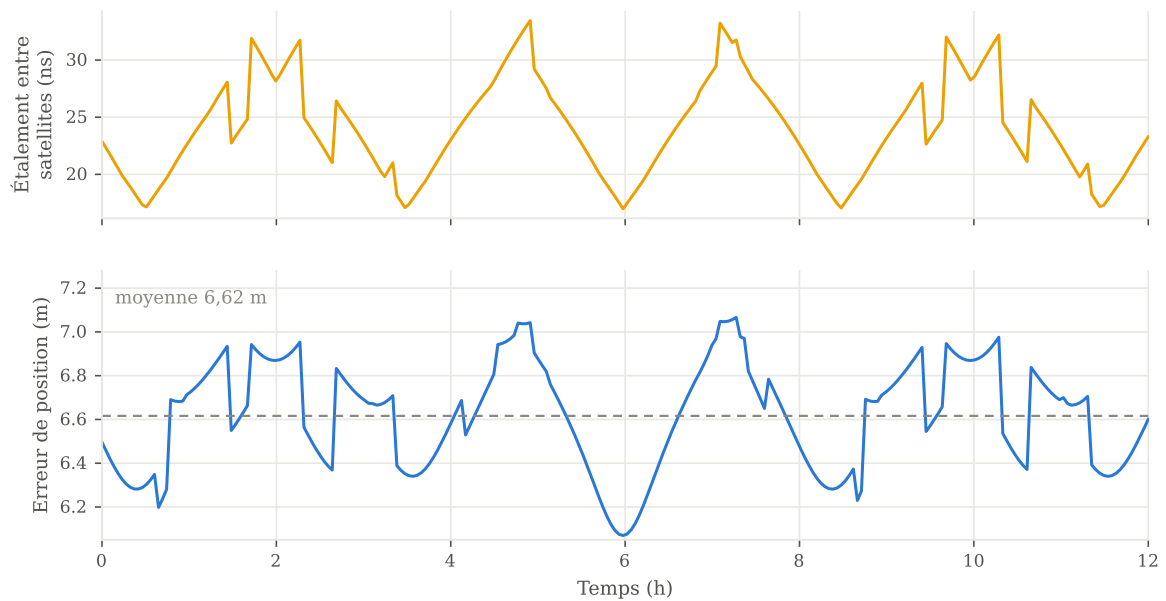


FIGURE 3 : En haut, l'écart entre les corrections d'excentricité des différents satellites visibles : chacun étant à une phase orbitale différente, l'écart ne s'annule jamais. En bas, l'erreur de position qui en résulte si la correction n'est pas appliquée. Contrairement au terme séculaire, elle est immédiate et ne dépend pas de la durée écoulée.

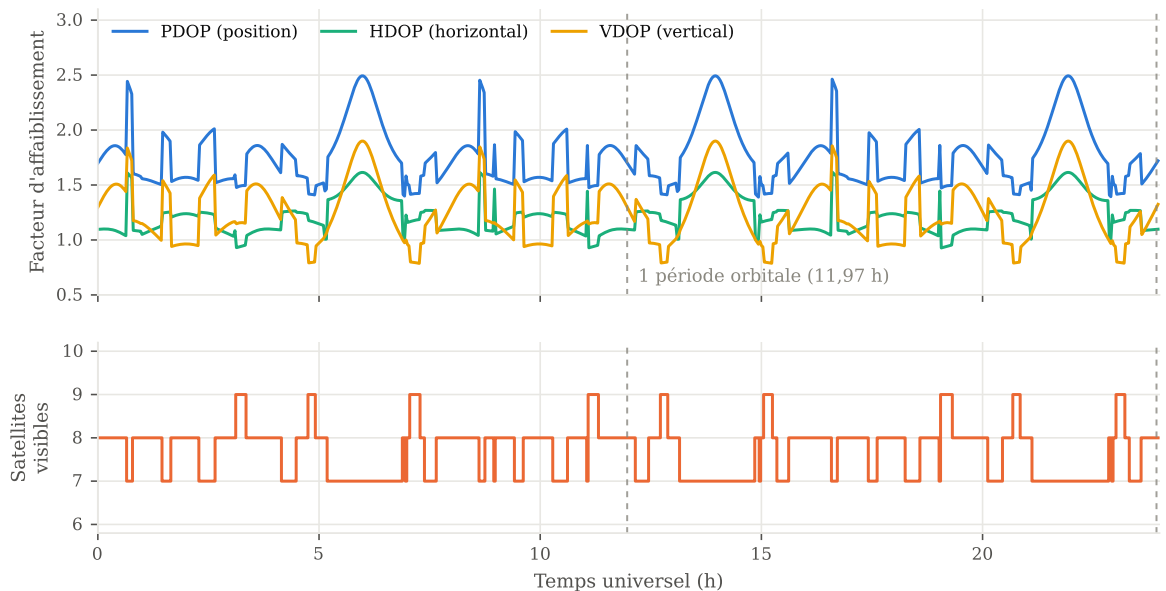


FIGURE 4 : Facteurs d'affaiblissement de la précision et nombre de satellites visibles sur 24 h. Les pointillés marquent les multiples de la période orbitale : le motif se referme sur lui-même, illustration directe du thème « cycles, boucles ». Les pics de PDOP correspondent aux instants où les satellites visibles sont mal répartis dans le ciel.

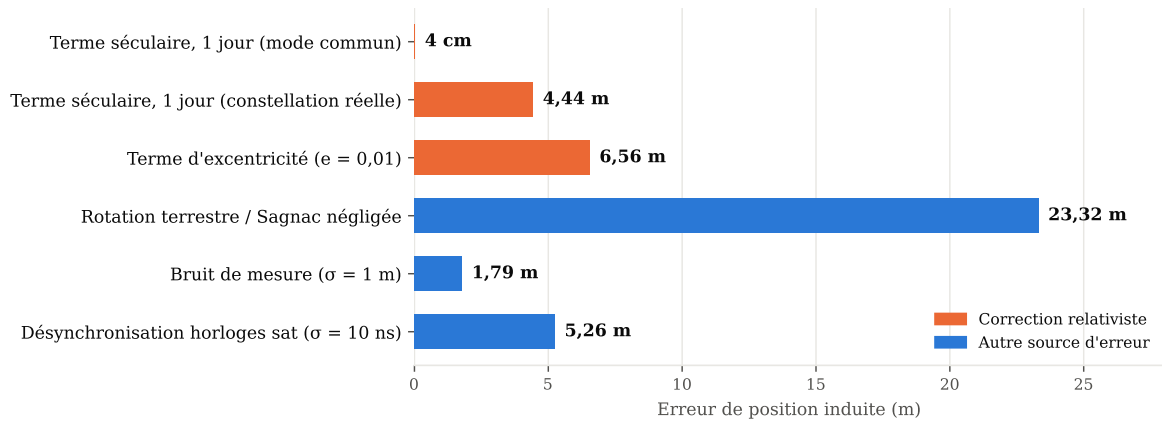


FIGURE 5 : Erreur de position induite par chaque poste isolé, toutes choses égales par ailleurs. La hiérarchie est contre-intuitive : la correction de rotation terrestre pèse plus lourd que l'ensemble des termes relativistes, et le terme séculaire — le plus gros en amplitude — est le moins coûteux en position.

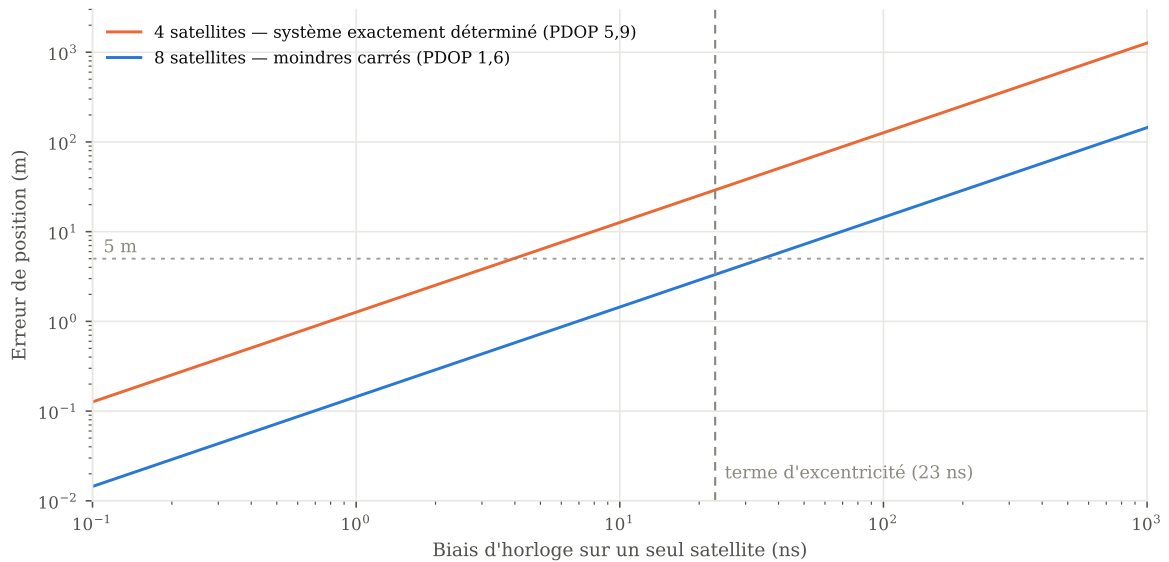


FIGURE 6 : Erreur de position provoquée par un biais d'horloge affectant un seul satellite. En configuration minimale à quatre satellites, le système est exactement déterminé : l'erreur passe intégralement dans la solution. Avec huit satellites, les moindres carrés répartissent le résidu et divisent l'erreur par neuf.

Poste	Erreur	Nature
Rotation terrestre / Sagnac négligée	23,32 m	différentiel, géométrique
Terme d'excentricité non corrigé	6,56 m	différentiel, périodique
Désynchronisation des horloges satellites ($\sigma = 10$ ns)	5,26 m	différentiel, aléatoire
Terme séculaire, 1 jour, constellation réelle	4,44 m	partiellement commun
Bruit de mesure ($\sigma = 1$ m)	1,79 m	aléatoire
Terme séculaire, 1 jour, constellation idéale	4 cm	mode commun pur

TABLE 4 : Contribution de chaque poste à l'erreur de position, chacun injecté seul.

5.4. Budget d'erreur

5.5. Pourquoi la redondance change tout

Avec quatre satellites, l'amplification mesurée vaut $4,2c$; avec 8 satellites elle tombe à $0,48c$, soit un facteur 9. **La redondance n'améliore pas seulement la géométrie : elle dilue les erreurs individuelles.** C'est l'argument technique qui justifie l'usage simultané de GPS, Galileo, GLONASS et BeiDou par les récepteurs modernes.

6. Analyse critique et limites

Une simulation ne prouve que ce que son modèle contient. Voici ce que le mien ne contient pas, et en quoi cela borne mes conclusions.

Hypothèse simplificatrice	Effet négligé	Conséquence sur les conclusions
Orbites képlériennes pures	Aplatissement terrestre J_2 , pression de radiation, Lune et Soleil	Modifie la géométrie instantanée, donc les valeurs exactes de DOP. Sans effet sur la conclusion principale , qui porte sur la structure commune / différentielle.
Aucune propagation atmosphérique	Ionosphère (jusqu'à 30 m), troposphère (2 à 25 m)	Dominent le budget d'erreur réel. Les chiffres relativistes sont donc des contributions <i>relatives</i> , non un budget opérationnel complet.
Segment sol absent	Le contrôle au sol resynchronise les horloges et diffuse des polynômes de correction	Limite la plus importante. La courbe de dérive séculaire suppose qu'aucune correction n'est appliquée ; en pratique la dérive est bornée par le suivi au sol.
Récepteur immobile, mono-fréquence	Dynamique, effet Doppler, combinaison bi-fréquence	Sous-estime les performances réelles d'un récepteur moderne.
Dispersion des demi-grands axes tirée aléatoirement	Valeurs réelles publiées dans les almanachs	La valeur de 8,4 m/jour est un ordre de grandeur, pas une mesure. Elle dépend linéairement de l'écart-type choisi (20 km).

TABLE 5 : Hypothèses du modèle et portée des conclusions.

Ce que je referais autrement

- Utiliser des almanachs GPS réels plutôt qu'une constellation nominale, pour remplacer la dispersion tirée au hasard par les demi-grands axes effectifs.

- Écrire le test de non-régression *avant* le solveur, et non après : il m'aurait fait gagner les trois semaines perdues sur l'erreur de 24 m.
- Comparer à des relevés NMEA d'un récepteur réel, pour confronter le modèle à la mesure
- c'est le prolongement naturel de ce travail.

7. Conclusion

Le chiffre de onze kilomètres par jour, dont je suis parti, est arithmétiquement exact et physiquement mal interprété. Il quantifie une dérive de *datation*, non une erreur de *position* : parce que le récepteur résout son horloge en même temps que sa position, toute perturbation commune à l'ensemble des satellites lui est transparente.

Ce qui dégrade réellement la position, ce sont les termes **différentiels** : le terme d'excentricité (6,62 m, immédiat et permanent), la dispersion des orbites réelles (8,4 m par jour, cumulatif) et, plus lourd encore que l'ensemble des effets relativistes, la correction de rotation terrestre (23,3 m). La leçon générale dépasse le GNSS : **dans un système qui estime ses propres biais, ce n'est pas l'amplitude d'une perturbation qui compte, mais sa structure** — et seule la part qui n'est pas commune se paie.

La relativité générale reste indispensable au GNSS. Mais la simulation montre qu'elle l'est pour des raisons plus subtiles, et plus intéressantes, que celle qu'on répète habituellement.

8. Bibliographie commentée

Chaque référence est suivie de ce qu'elle a effectivement apporté au travail, comme l'exige le SCEI.

Références

- [1] N. Ashby, « Relativity and the Global Positioning System », *Physics Today* 55(5), p. 41-47, 2002. *Source de la formulation d'origine du chiffre des 11 km par jour, présentée comme des « erreurs de navigation ».*
- [2] N. Ashby, « Relativity in the Global Positioning System », *Living Reviews in Relativity*, vol. 6, art. 1, 2003. *Article de référence, écrit par le physicien qui a participé à la définition des corrections embarquées. C'est la source qui m'a fourni la décomposition des trois termes (gravitationnel, cinématique, excentricité) et la valeur exacte du décalage de fréquence appliqué en usine. C'est aussi lui qui souligne, en une phrase que j'ai d'abord mal comprise, qu'un décalage commun est sans effet sur la position remarque qui est devenue le cur de mon travail.*
- [3] S. Bancroft, « An Algebraic Solution of the GPS Equations », *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-21(1), p. 56-59, 1985. *Quatre pages qui donnent une solution exacte, non itérative, du problème de positionnement, en utilisant le produit pseudo-euclidien de Minkowski. J'ai implémenté cet algorithme pour disposer d'un second solveur totalement indépendant du premier : la comparaison des deux est devenue mon principal outil de validation.*
- [4] C. Misner, K. Thorne, J. Wheeler, « Gravitation », W. H. Freeman, 1973, chapitres 17 et 18. *M'a servi pour la limite newtonienne de l'équation de champ : le passage de $G(\mu\nu) = 8\pi G/c^4 \cdot T(\mu\nu)$ à $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$, et surtout l'identification $g(00) = -(1 + 2\Phi/c^2)$ dont tout mon travail dépend. Ouvrage difficile ; je n'en ai exploité que le calcul de champ faible, que j'ai refait entièrement.*

- [5] US Space Force, « IS-GPS-200, Navstar GPS Space Segment / Navigation User Interfaces », Interface Specification, révision en vigueur. *Document normatif du système. C'est la source des paramètres numériques réalistes de ma simulation (demi-grand axe, inclinaison, excentricité typique) et la formule officielle de la correction d'excentricité, $\Delta t = -2\sqrt{\mu a} \cdot e \cdot \sin E / c^2$, que j'ai reprise telle quelle.*
- [6] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, E. Wasle, « GNSS Global Navigation Satellite Systems », Springer, 2008. *Manuel de référence dont j'ai tiré le formalisme des moindres carrés appliqué au GNSS, la définition rigoureuse des facteurs DOP et la correction de rotation terrestre. C'est là que j'ai compris que l'effet Sagnac n'était pas une subtilité négligeable.*
- [7] E. Kaplan, C. Hegarty, « Understanding GPS/GNSS : Principles and Applications », Artech House, 3^e édition, 2017. *Utilisé pour le budget d'erreur d'un récepteur réel (ionosphère, troposphère, multitrajets), afin de replacer mes résultats relativistes dans un ordre de grandeur opérationnel et d'éviter de surestimer leur importance relative.*
- [8] H. Fliegel, R. DiEsposti, « GPS and Relativity : An Engineering Overview », Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting, 1996. *Source décisive pour ma conclusion. Écrit par des ingénieurs du système et non par des théoriciens, il établit que seuls les effets relativistes DIFFÉRENTIELS entre satellites affectent la navigation, un biais commun étant absorbé par l'estimation d'horloge. C'est ce document qui m'a permis de comprendre que mon résultat « aberrant » était en fait le bon, et de le formuler correctement.*
- [9] P. Misra, « Inside the box : GPS and relativity », GPS World, octobre 2023. *Article court d'un co-auteur d'un manuel de référence, qui énonce explicitement ce que ma simulation retrouve : le biais relativiste commun se confond avec celui du récepteur et l'estimation de position n'en est pas affectée mais la diffusion de temps, elle, est ruinée. M'a servi de contre-expertise après coup.*
- [10] J. B. Hartle, « Gravity : An Introduction to Einstein's General Relativity », Addison-Wesley, 2003, chapitre 6. *Traitement pédagogique de la dilatation gravitationnelle du temps, plus accessible que Misner-Thorne-Wheeler. M'a permis de vérifier indépendamment mon expression de $d\tau/dt$ avant de la coder.*

Annexe A. Extraits du code

La chaîne complète représente environ 400 lignes de Python et NumPy réparties en trois modules : `gnss.py` (modèle et solveurs), `experiences.py` (protocoles) et `figures.py` (tracés). Le cœur de la boucle de Newton-Gauss :

```
def newton_gauss(S, P, u0=None, tol=1e-4, itmax=30, corriger_rotation=True):
    u, hist = (np.zeros(4) if u0 is None else np.array(u0, float)), []
    for k in range(itmax):
        rho, Sr = portee_geom(S, u[:3], corriger_rotation) # boucle interne : Sagnac
        e = (Sr - u[:3]) / rho[:, None] # vecteurs unitaires
        H = np.column_stack([-e, np.ones(len(S))]) # matrice de geometrie
        du = np.linalg.lstsq(H, P - (rho + u[3]), rcond=None)[0]
        u += du
        hist.append(np.linalg.norm(du))
        if hist[-1] < tol:
            break
    return u, H, hist
```

Et la solution fermée de Bancroft, qui repose entièrement sur le produit de Minkowski :

```
mink = lambda a, b: a[0]*b[0] + a[1]*b[1] + a[2]*b[2] - a[3]*b[3]
A = np.column_stack([S4, P4]) # lignes a_i = (x_i, y_i, z_i, P_i)
r = np.array([0.5*mink(a, a) for a in A])
M = np.diag([1., 1., 1., -1.])
```

```
p, q = M @ (np.linalg.inv(A) @ np.ones(4)), M @ (np.linalg.inv(A) @ r)
# <lam*p + q, lam*p + q> = 2*lam -> trinome en lam, deux racines
lam = np.roots([mink(p,p), 2*mink(p,q) - 2, mink(q,q)])
```

Conformément aux attendus, les listings complets sont à fournir en deux exemplaires papier le jour de l'oral.

Annexe B. Mise en cohérence des objectifs du TIPE

Document de cadrage déposé lors de la première phase du concours, avant le travail scientifique lui-même. Il est reporté en annexe pour que l'article se lise d'un trait ; les compteurs vérifient le respect des limites imposées par le SCEI.

Annexe B.1. Positionnements thématiques

Le premier positionnement relève de la discipline de la filière, conformément aux attendus.

Rang et domaine	Sous-domaine	Justification
1. PHYSIQUE	Mécanique	Dynamique orbitale, métrique de Schwarzschild en champ faible, propagation du signal dans un référentiel tournant.
2. MATHÉMATIQUES	Analyse numérique	Résolution d'un système non linéaire par linéarisation itérative, moindres carrés, conditionnement.
3. INFORMATIQUE	Informatique pratique	Implémentation d'une chaîne de simulation complète et de deux algorithmes de résolution en Python/NumPy.

Annexe B.2. Mots-clés

Français	Anglais
pseudodistance	<i>pseudorange</i>
relativité générale	<i>general relativity</i>
moindres carrés	<i>least squares</i>
mode commun	<i>common mode</i>
dilution de précision	<i>dilution of precision</i>

Annexe B.3. Rubriques rédigées

Ancrage au thème annuel « Cycles, boucles » (48 mots sur 50). Le GNSS est un empilement de boucles. Boucle orbitale : la constellation se répète en un demi-jour sidéral. Boucle de résolution : position et temps se déterminent mutuellement. Boucle numérique de Newton-Gauss. Et la boucle conceptuelle d'Einstein, où la matière courbe l'espace-temps qui guide en retour la matière.

Motivation du choix du sujet (49 mots sur 50). On lit partout que sans correction relativiste le GPS dériverait de onze kilomètres par jour. Ce chiffre m'a paru suspect : un décalage identique sur tous les satellites ne devrait-il pas s'absorber dans l'inconnue d'horloge du récepteur ? J'ai voulu trancher par le calcul plutôt que par l'argument d'autorité.

Problématique retenue (37 mots sur 50). Quelle part de l'erreur de position d'un récepteur GNSS est réellement imputable aux effets relativistes, une fois pris en compte le fait que le récepteur résout simultanément sa position et le biais de sa propre horloge ?

Objectifs personnels (74 mots sur 100). Construire une chaîne de simulation complète et vérifiable : constellation képlérienne, génération des pseudodistances, résolution de position. Implémenter deux algorithmes indépendants la solution fermée de Bancroft et la boucle itérative de Newton-Gauss et les faire se contrôler mutuellement. Injecter séparément chaque terme relativiste (séculaire, excentricité, Sagnac) pour mesurer sa contribution propre à l'erreur de position. Confronter le résultat obtenu au chiffre de onze kilomètres par jour couramment avancé, et expliquer quantitativement l'écart.

La bibliographie commentée exigée par le SCEI (414 mots sur 650 autorisés) constitue la section 8, en fin de document.

Annexe C. Déroulé opérationnel du TIPE

Huit étapes chronologiques, chacune sous la limite de 50 mots. Le SCEI attend explicitement que les difficultés et les impasses y figurent : ce sont ici les étapes 3, 4 et 5.

1. **Juillet 2025 Choix du sujet** — Le thème « Cycles, boucles » paraît au Bulletin officiel en avril. En lisant un article de vulgarisation sur le GPS, je tique sur les « 11 km par jour ». Je décide d'en faire mon sujet et me procure l'article d'Ashby.
2. **Septembre 2025 Cadrage théorique** — Reprise de la limite newtonienne de l'équation d'Einstein pour retrouver $g(00) = -(1+2\Phi/c^2)$, puis calcul à la main des trois contributions au décalage d'horloge. Je retrouve les 38,6 $\mu\text{s}/\text{jour}$ publiés : le formalisme tient.
3. **Octobre - novembre 2025 Première simulation, premier échec** — Constellation et solveur codés en Python. Le solveur converge mais laisse une erreur résiduelle de 24 m, insensible à tout réglage. Trois semaines perdues à chercher un bug dans les moindres carrés, qui n'y était pas.
4. **9 décembre 2025 Identification de l'erreur** — L'erreur venait du modèle de mesure, pas du solveur : la rotation terrestre était injectée à la génération sans être corrigée à la résolution. Appliquée des deux côtés, l'erreur résiduelle tombe à $3 \cdot 10^{-9}$ m.
5. **Janvier 2026 Le résultat inattendu, et dépôt du MCOT** — En injectant le terme séculaire, je trouve une erreur quasi nulle au lieu des kilomètres attendus. D'abord pris pour un bug ; c'est en réalité le mode commun. Le MCOT est déposé le 28 janvier autour de cette découverte.
6. **Février 2026 Isolement des termes différentiels** — Ajout d'une dispersion réaliste des demi-grands axes, puis du terme d'excentricité. Ce sont eux, et non le terme séculaire, qui produisent une erreur métrique. Construction du budget d'erreur poste par poste.
7. **Mars 2026 Validation croisée** — Implémentation du solveur fermé de Bancroft, indépendant du premier. Les deux méthodes concordent à $5 \cdot 10^{-5}$ m près. Étude du DOP sur 24 h, qui rattache explicitement le travail au thème des cycles.
8. **Avril - juin 2026 Contre-expertise et préparation** — Fliegel & DiEposti puis Misra confirment le mode commun ; je corrige trois erreurs d'étiquetage, dont le troisième terme du tableau. Quantification des limites du modèle. Présentation déposée le 2 juin.

Calendrier détaillé et jalons du concours

Le DOT étant contraint à 50 mots par étape, voici le déroulé complet sur l'année, mis en regard des échéances officielles de la session 2026.

Période	Travail réalisé	Échéance SCEI
Avril 2025	Publication du thème « Cycles, boucles » au Bulletin officiel	Thème annuel
Juillet 2025	Choix du sujet, lecture d'Ashby (Living Reviews, 2003)	—
Septembre 2025	Limite newtonienne, calcul des trois termes relativistes	—
Octobre 2025	Codage de la constellation képlérienne et du masque d'élévation	—
Novembre 2025	Premier solveur Newton-Gauss erreur résiduelle inexplicée de 24 m	—
Décembre 2025	Diagnostic : incohérence Sagnac entre génération et résolution	—
Janvier 2026	Découverte du mode commun ; rédaction du MCOT	Dépôt MCOT : 15 janv. - 5 févr.
Février 2026	Termes différentiels, budget d'erreur, étude de sensibilité	—
Mars 2026	Solveur de Bancroft, validation croisée, étude du DOP sur 24 h	—
Avril 2026	Contre-expertise bibliographique, correction de trois erreurs	—
Mai 2026	Analyse critique des limites, rédaction, tracé des figures	—
2 juin 2026	Dépôt de la présentation (PDF 4 :3, moins de 5 Mo)	Dépôt présentation : 25 févr. - 9 juin
Mi-juin 2026	Validation par le professeur référent	Validation : 11 - 19 juin
Été 2026	Oral de 15 minutes devant le jury	Épreuve

TABLE C.6 : Déroulé annuel et jalons de la session 2026.